ЛЕКЦИЯ-15

§11. Грин формуласы. Қисықсызықты интегралды қолданып ауданды табу

Тұйық L контуры бойынша алынған қисықсызықты интегралмен осы контурмен шектелген жазық D облысы бойынша алынған қос интеграл арасындағы байланысты қарастырамыз.

D облысы төменгі және жоғарғы жағынан сәйкес $y = y_1(x)$ пен $y = y_2(x)$ үзіліссіз қисықтармен, сол және оң жағынан $x = a$, $x = b$ түзулерімен шектелген және $P(x, y)$ функциясы $\frac{\partial P}{\partial y}$ дербес туындысымен бірге тұйық D облысында үзіліссіз болсын.

Рис 4.7.

Тұйық L=$ABCDA$ контурының бағыты оң болсын дейік. Қос интегралды $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ қисықсызықты интегралға түрлендіреміз. Алдымен қос интегралды қайталама интегралға келтіреміз

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left[P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right] dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \qquad (1)$$

Енді (1) өрнектегі анықталған интегралдарды қисықсызықты интеграл арқылы жазамыз

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int\limits_{DC} P(x, y) dx = -\int\limits_{CD} P(x, y) dx,$$

$$\int_a^b P[x, y_1(x)] dx = \int\limits_{AD} P(x, y(x) dx$$

Жоғарыдағы (1) өрнектің оң жағына екі қисықсызықты интегралдарды қосамыз

$$-\int\limits_{BC} P[x, y(x)] dx, \quad -\int\limits_{DA} P[x, y(x)] dx.$$

Бұл екі интеграл да нөлге тең, себебі $x = a$, $x = b$ түзулері OX осіне перпендикуляр. Сонда

$$\iint\limits_{P} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{AB} Pdx - \int\limits_{BC} Pdx - \int\limits_{CD} Pdx - \int\limits_{DA} Pdx = -\int\limits_{L} Pdx \qquad (2)$$

Енді D облысы $y = c,\ \ y = d$ түзулерімен және $x = x_1(y), \quad x = x_2(y)$, $\left(x_1(y) \le x_2(y)\right)$ үзіліссіз қисықтарымен шектелген және $Q(x, y)$ функциясы дербес туындысы $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ пен бірге D облысында үзіліссіз болсын.

Рис 4,9

Қос интегралды $\iint\limits_{D} \dfrac{\partial Q}{\partial x} dxdy$ жоғарыдағыдай қайталама интегралға келтіреміз

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx.$$

Енді қисықсызықты интеграл арқылы жазамыз

$$\int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_{L} Qdy$$

немесе

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{L} Qdy \qquad (3)$$

(3) формуладан (2) формуланы аламыз

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (4)$$

Сонымен (4) формула қос интеграл мен қисықсызықты интеграл арасындағы байланысты береді. (4) өрнекті Грин[1] формуласы деп атайды.

[1] Джордж Грин (1793-1841) – ағылшын математигі